PART3　指数関数・対数関数の最大・最小

3　[1]　関数 $y=4^x+4^{-x}-(2^x+2^{-x})-3$ について，次の問いに答えよ。

(1)　$t=2^x+2^{-x}$ とおくとき，$t\geqq 2$ であることを示せ。

(2)　y を t を用いて表せ。また，y の最小値を求めよ。

[2]　$x>1$，$y>1$ のとき，$\log_x y+\log_y x$ の最小値を求めよ。

Point Pickup

[1]　$2^x>0$，$2^{-x}>0$ であり，$2^x\cdot 2^{-x}=1$ すなわち 2^x と 2^{-x} の積が一定値であることから，相加平均と相乗平均の大小関係を用いる。

[2]　$x>1$，$y>1$ のとき，$\log_x y>0$，$\log_y x=\dfrac{1}{\log_x y}>0$ であることから，相加平均と相乗平均の大小関係を用いて最小値を求める。

第13講　PART3　確認問題

1　関数 $y=9^x+9^{-x}-2(3^x+3^{-x})$ について，次の問いに答えよ。

(1)　$t=3^x+3^{-x}$ とおくとき，t のとり得る値の範囲を求めよ。

[ア]

(2)　y を t を用いて表せ。また，y の最小値を求めよ。

$y=$ [イ]，最小値 [ウエ]

[[ア]の選択肢]

① $t>0$　② $t\geqq 0$　③ $t<0$　④ $t\leqq 0$

⑤ $t>2$　⑥ $t\geqq 2$　⑦ $t<2$　⑧ $t\leqq 2$

[[イ]の選択肢]

① t^2-2t　② t^2+2t

③ t^2-2t-2　④ t^2+2t-2

⑤ t^2-2t-4　⑥ t^2+2t-4

2　$x>1,\ y>1$ のとき，$\log_x y^2+\log_y\sqrt{xy}$ の最小値を求めよ。

$\dfrac{[オ]}{[カ]}$

PART3　指数関数・対数関数の最大・最小

3　[1]　関数 $y=4^{x}+4^{-x}-(2^{x}+2^{-x})-3$ について，次の問いに答えよ。

(1)　$t=2^{x}+2^{-x}$ とおくとき，$t\geqq 2$ であることを示せ。

(2)　y を t を用いて表せ。また，y の最小値を求めよ。

[2]　$x>1$，$y>1$ のとき，$\log_{x}y+\log_{y}x$ の最小値を求めよ。

[1]　(1)　$2^{x}>0$，$2^{-x}>0$ より，相加平均と相乗平均の大小関係から

$$2^{x}+2^{-x}\geqq 2\sqrt{2^{x}\cdot 2^{-x}}=2$$

等号成立は　$2^{x}=2^{-x}$　つまり　$x=-x$　より　$x=0$ のとき

よって　$t\geqq 2$

(2)　$4^{x}+4^{-x}=(2^{x})^{2}+(2^{-x})^{2}=(2^{x}+2^{-x})^{2}-2\cdot 2^{x}\cdot 2^{-x}=t^{2}-2$

よって　$y=t^{2}-2-t-3=t^{2}-t-5$

$y=\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^{2}-\dfrac{21}{4}$ $(t\geqq 2)$　より，$t=2$ つまり $x=0$ のとき　最小値 -3

[2]　$x>1$，$y>1$ のとき，$\log_{x}y>0$，$\log_{y}x=\dfrac{1}{\log_{x}y}>0$

相加平均と相乗平均の大小関係から

$$\log_{x}y+\log_{y}x=\log_{x}y+\frac{1}{\log_{x}y}\geqq 2\sqrt{\log_{x}y\cdot\frac{1}{\log_{x}y}}=2$$

等号成立は　$\log_{x}y=\dfrac{1}{\log_{x}y}$　　$(\log_{x}y)^{2}=1$

$\log_{x}y>0$ より　$\log_{x}y=1$　　よって　$x=y$ のとき

したがって，求める最小値は 2

第13講　PART3　確認問題 解答

1

[正解] ア：⑥，イ：③，ウエ：-2

[解説]

(1)　$3^x>0$，$3^{-x}>0$ より，相加平均と相乗平均の大小関係から [A]

$$3^x+3^{-x} \geqq 2\sqrt{3^x \cdot 3^{-x}}=2$$

等号が成り立つのは，$3^x=3^{-x}$ のときであるから

$$x=-x \qquad \text{ゆえに} \quad x=0$$

よって，求める t の値の範囲は　$\boldsymbol{t \geqq 2}$

> [A]　相加平均と相乗平均の大小関係
> $a>0$，$b>0$ のとき
> $$\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$$
> 等号が成り立つのは，$a=b$ のとき。

(2)　$9^x+9^{-x}=(3^x)^2+(3^{-x})^2$

$$=(3^x+3^{-x})^2-2\cdot 3^x \cdot 3^{-x}$$

$$=t^2-2$$

よって

$$y=t^2-2-2t=\boldsymbol{t^2-2t-2}$$

$y=(t-1)^2-3$ $(t \geqq 2)$ より，$t=2$ のとき，

すなわち，$x=0$ のとき　最小値 $\boldsymbol{-2}$

2　[正解] オ：5，カ：2

[解説]

$$\log_x y^2+\log_y\sqrt{xy}$$

$$=2\log_x y+\frac{1}{2}\log_y xy$$

$$=2\log_x y+\frac{1}{2}(\log_y x+\log_y y)$$

$$=2\log_x y+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\log_x y}+1\right)$$ [B]

$$=2\log_x y+\frac{1}{2\log_x y}+\frac{1}{2}$$

[B]　$\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}$

$x>1$，$y>1$ のとき　$2\log_x y>0$，$\dfrac{1}{2\log_x y}>0$ [C]

[C]　$a>1$ のとき
$p>1 \Longleftrightarrow \log_a p>0$

ゆえに，相加平均と相乗平均の大小関係から [A]

$$2\log_x y+\frac{1}{2\log_x y}+\frac{1}{2}$$

$$\geqq 2\sqrt{2\log_x y\cdot\frac{1}{2\log_x y}}+\frac{1}{2}=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$$

等号が成り立つのは，$2\log_x y=\dfrac{1}{2\log_x y}$ のときである。このとき　$(\log_x y)^2=\dfrac{1}{4}$

$\log_x y>0$ より

$$\log_x y=\frac{1}{2}$$

$$=\log_x\sqrt{x}$$

ゆえに　$y=\sqrt{x}$

以上から，求める最小値は　$\boldsymbol{\dfrac{5}{2}}$